www.tousleconcours.info

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2011

EXERCICE 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ Unité graphique : 2 cm.

1) On rappelle que pour tous nombres complexes a et b. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$

2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définie par

$$a = 2; b = -1 + i\sqrt{3}; c = -1 - i\sqrt{3}$$

On rappelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Placer les points A, B et C dans le repère

Dans la suite de l'exercice, on complétera cette figure

b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$

c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués

3) On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$. On note m, n, p et q leurs affixes.

a) Montrer que l'affixe du point N est à $\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$ En déduire que les points O, N et C sont alignés

b) Montrer que n+1=i(q+1).Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c) Montrer que le quadrilatère MNPQ est carré.

EXERCICE 2 :

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le point A(-1,2,3) et la droite D de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 9 - 4t \\ y = 6 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D.

1)

1.a) Donner une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite D et passant par A.

1.b) Vérifier que le point B(-3,3,-4) appartient à la droite D.

1.c) calculer la distance d_B entre le point B et le plan

1.d) Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2) Soit M un point de la droite D. Exprimer AM en fonction de t. Retrouver alors la valeur exacte de d.

PROBLEME : LES FONCTIONS

PARTIE A : exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique C_g coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse 0 et admet en ce point comme tangente la droite d tracée sur la figure en dessous.

Soit g la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$

1. En prenant appui sur la représentation graphique donnée en annexe :
   a) Indiquer à quel entier est égal g(0).
   b) Expliquer pourquoi $g'(0) = 2$
   c) Préciser sur quel intervalle la fonction g semble être positive.
2. On admet maintenant que $g(x) = ax + b + e^x$ où a et b sont des réels que l'on va déterminer.
   a) Déterminer b en utilisant la question *1.a)*

www.tousleconcours.info

b) Calculer g'(x) en fonction de a en utilisant la question *1.b)*

c) En déduire que pour tout réel x, on a $g(x) = x - 1 + e^x$

PARTIE B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$f(x) = x - 4 - xe^x$$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Montrer que pour tout réel non nul, $f(x) = x\left(\frac{1-4}{x-e^{-x}}\right)$

2) a) Calculer le limite de f en plus l'infini

b) Démontrer que la droite d'équation $y=x-4$ est une asymptote de la courbe C

c) Etudier les positions relatives de la courbe avec l'asymptote.

3) On note f' la dérivée de la fonction f

a) pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$

b) Utiliser la question 1.c de la partie A. Déterminer le signe de $f'(x)$

c) Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4) En prenant 1 cm comme unité sur chaque axe, tracer C et les asymptotes dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

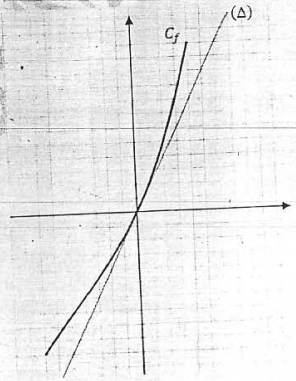
PARTIE C : calcul de l'aire

1) Soit la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $h(x) = -xe^{-x}$

a) Considérons une fonction H définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $H(x) = (x+1)e^{-x}$

Montrer que H est une primitive de la fonction h.

b) Calculer l'intégrale de f définie dans la partie B

2) a) Soit la partie du graphe délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonn

d'équation $x = 2$. Calculer l'aire A de cette partie. Donner la valeur de A en cm^2.